Test de independencia basado en análisis de recurrencia

Diego G. Fernández[1]

RESUMEN

Se propone un procedimiento para testear si dos series de tiempo proceden de sistemas dependientes o independientes. Se comienza analizando una versión multivariada del análisis de cuantificación de recurrencias (AC). Se deriva un test de hipótesis basado en el número de recurrencias conjuntos de ambas series bajo la hipótesis nula de independencia. La performance del test se evalúa en base a varias simulaciones de diferentes tipos de sistemas dinámicos: aleatorios, deterministas caóticos, deterministas no caóticos, sistemas afectados por ruido y sistemas acoplados. Se obtienen resultados satisfactorios en todos los casos. Por último, la metodología se aplica en los siguientes temas económicos: 1) relación entre tasas interés nominales y tasa de inflación; y 2) relación entre el producto interno bruto y desempleo. Los resultados sugieren que el procedimiento propuesto es una herramienta adecuada para detectar dependencias lineal y no lineal entre series reales.

Palabras Clave: *análisis de recurrencia, test de hipótesis, dependencias lineales y no lineales.*

1. Introducción

Cuando trabajamos con series de tiempo económicas suponemos que son el resultado de un proceso generador desconocido y necesitamos procedimientos alternativos para descubrir las propiedades dinámicas subyacentes. Esto es particularmente relevante cuando se trata de analizar la posible interrelación entre dos (o más) variables, que es un tema de investigación primaria en Economía.

---

[1] Magister en Economía. Docente Departamento de Economía FCEA, UDELAR. Analista estadístico en el Banco Central del Uruguay.
Las opiniones y posibles errores del estudio son responsabilidad del autor y no comprometen las instituciones donde se desempeña.

Se han propuesto diferentes métodos en la literatura para testear las interrelaciones o dependencias estadísticas entre series de tiempo: empezando por los ampliamente utilizados coeficientes de correlación de Pearson, Spearman y Kendall, la medida D de Hoeffing, métodos basados en información mutua, y un número amplio de contribuciones más recientes: correlación de distancia (Szekely et al, 2007), coeficiente de máxima información (Reshef et al 2011), la medida de Heller-Heller-Gorfine (Heller et al, 2013), métodos basados en Copula (Sklar, 1959), entre otros. Un estudio comparativo de todos los métodos mencionados se plantea en (Siqueira et al, 2014).

En este trabajo se propone un método para testear la existencia de dependencia estadística (lineal o no lineal) entre dos series de tiempo cuyos procesos generadores de datos son desconocidos. El test presenta dos ventajas: la simplicidad de implementación e interpretación; se basa en una distribución de probabilidad exacta. El punto de arranque es la metodología de gráfico de recurrencia (GR), (Eckmann et al. 1987) y en particular el análisis de cuantificación de recurrencia (AC), (Zbilut y Webber, 1992 y Webber y Zbilut, 1994). El GR y el ACR han sido utilizados para analizar las propiedades de sistemas dinámicos en física, química, biología y de forma más reciente en economía. Un resumen de la aplicación de éstas metodologías en diferentes áreas puede consultarte en (Marwan, 2008). El análisis de recurrencia brinda información muy importante sobre la estructura subyacente de los sistemas y sobre la posible relación o interrelación entre ellos. Esta posible interrelación se analiza por medio de la extensión multivariada del AC llamada análisis conjunto de recurrencia (ACR). El test se especifica en base a este análisis multivariado de recurrencia.

El resto del artículo se estructura como sigue. En la sección 2 se brinda una breve explicación de la metodología utilizada. En la sección 3 se selecciona una medida del ACR y se obtiene su distribución de probabilidad bajo la hipótesis de independencia. En la sección 4 se define el test estadístico de independencia. En las secciones 5 y 6 se realizan aplicaciones del método propuesto para series simuladas y económicas respectivamente. Finalmente, en la sección 7 se brinda un resumen de las principales ideas encontradas.

2. El gráfico de recurrencia y análisis de cuantificación

Como se menciona en la sección anterior, el punto de partida de este trabajo es el denominado GR. El GR es una herramienta gráfica que muestra las recurrencias en una serie de datos (x), construida utilizando la matriz de recurrencia, MR:

$$MR_{i,j} = \Theta\left(r - \left\| x_i - x_j \right\|\right), i, j = 1,..,n \qquad (1)$$

Donde Θ es la función Heaviside, r es un radio predefinido, y x_i, x_j son observaciones o estados de un sistema. La matriz de recurrencia, MR, es una matriz simétrica nxn, con valores uno de esta matriz correspondiendo a puntos del GR. El objetivo de esta herramienta es detectar patrones de recurrencia en los datos.

De forma de mejorar la calidad de la información obtenida de los GR, Zbilut y Webber (1992) y Webber y Zbilut (1994) cuantifican la información subyacente del GR por medio de una serie de indicadores basados en la densidad de puntos recurrentes en los GR. Esta metodología es denominada análisis de cuantificación (ACR). Más recientemente, se ha propuesto una extensión de esta metodología para analizar la relación entre diferentes sistemas denominada análisis de conjunto de recurrencia, ACR, propuesto por Romano (2004) para analizar la interrelación entre dos sistemas. El punto inicial en este caso son las recurrencias de las observaciones de cada sistema y por medio de la construcción de la matriz de recurrencia conjunta, MRC, definida como:

$$MRC_{i,j} = \Theta\left(r_x - \left\|x_i - x_j\right\|\right)\Theta\left(r_y - \left\|y_i - y_j\right\|\right), i, j = 1, \ldots, n \qquad (2)$$

La matriz MRC es simétrica. Los valores “1” de esta matriz corresponden con recurrencias simultáneas de ambos sistemas. Por lo tanto, si ambos sistemas están relacionados de alguna forma se debe observar un alto número de recurrencias conjuntas.

El principal objetivo de este artículo es obtener un criterio que permita distinguir cuando dos sistemas son independientes o no. Para realizar esto se utiliza una medida obtenida del AC que resume la información más relevante de ACR. La metodología propuesta se basa en Fernández (2015) en donde se utiliza el análisis de recurrencia conjunto para estudiar interrelaciones entre series reales sin proponer un test estadístico. El test que se propone en este artículo es simple de aplicar e interpretar y se basa en una distribución de probabilidad exacta, lo que implica que puede utilizarse para series de datos de cualquier longitud.

3. El estadístico TREC y su distribución de probabilidad

Como se mencionó antes, el ACR muestra la recurrencia conjunta entre dos series. Dado que su construcción requiere que ambas matrices de recurrencias tengan el mismo orden, las series que serán utilizadas para construir el ACR deben tener el mismo tamaño, n.

El principal indicador que resume la información contenida en el ACR es la tasa de recurrencia, TREC, definido como TREC = 100(NPR/NP), donde NJR es el número de puntos recurrentes, o el número de “1” de la MRC, y TP es el total de puntos de MRC. Obviamente, $TP = n(n-1)/2$.

Se denota por NPR_x y por NPR_y el número de puntos recurrentes de cada serie, y $TREC_x$ y $TREC_y$ sus correspondientes tasas de recurrencias. Si las tasas de recurrencias son diferentes, se asignará un subíndice 1 al GR con la menor recurrencia, y un subíndice 2 al GR con la recurrencia mayor. Es evidente entonces que $0 \leq TREC \leq TREC_1 \leq TREC_2$.

Cuanto mayor sea el valor de TREC, mayor es el porcentaje de recurrencias simultáneas. En consecuencia, si dos series han sido generadas de sistemas con un alto grado de similaridad dinámica, el TREC estará cercana al máximo ($TREC_1$). En contraste, si ambas series han sido generadas de sistemas independientes, el valor de TREC será bajo. Para valores intermedios este criterio no brinda resultados conclusivos. Por lo tanto, es necesario un test estadístico que brinde un valor a partir del cual poder establecer si ambas series son independientes o no.

En orden de construir este test, es necesario obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria NPR del ACR construido de dos series generadas en procesos independientes (por ejemplo, dos series puramente aleatorias), de las cuales se obtienen los números de puntos del ACR que son absolutamente aleatorios. Este supuesto de independencia será la hipótesis nula del test.

Bajo la hipótesis nula la probabilidad de que un punto en el primero gráfico de recurrencia, GR_1, sea también un punto en el segundo, GR_2, es NPR_2 / NP. Obviamente, la probabilidad que un punto del GR_1 no sea un punto del GR_2 es $\left(NP - NP_2\right)/ NP$. En consecuencia, la probabilidad de que ningún punto de GR_1 sea un punto de GR_2, y por lo tanto P(NPR=0), viene dado por la expresión:

$$P\left(NPR = 0\right) = \frac{\prod_{i=0}^{NP_1-1}\left(NP - NP_2 - i\right)}{\prod_{i=0}^{NP_1-1}\left(NP - i\right)} \qquad (3)$$

La probabilidad de que solo un punto de GR_1 sea también un punto de GR_2, es decir P(NPR=1) viene dada por el producto de los siguientes tres términos:

$$P\left(NPR = 1\right) = \frac{NP_2}{NP} \cdot \frac{\prod_{i=0}^{NP_1-2}\left(NP - NP_2 - i\right)}{\prod_{i=1}^{NP_1-1}\left(NP - i\right)} . NP_1$$

El primer término es la probabilidad de que un punto de GR_1 sea también un punto de GR_2. El segundo término es la probabilidad de que los restantes puntos de GR_1 no sean puntos de GR_2. El Resultado es multiplicado por NP_1, el número de casos diferentes que pueden aparecer. Luego de reagrupar podemos obtener:

$$P\left(NPR = 1\right) = \frac{\prod_{i=0}^{NP_1-2}\left(NP - NP_2 - i\right)}{\prod_{i=0}^{NP_1-1}\left(NP - i\right)} . NP_2 . NP_1$$

Razonando de forma similar, la probabilidad de que dos puntos en el ACR será:

$$P(NPR=2)=\left(\frac{NP_2}{NP}.\frac{NP_2-1}{NP-1}\right).\frac{\prod_{i=0}^{NP_1-3}(NP-NP_2-i)}{\prod_{i=2}^{NP_1-1}(NP-i)}.\binom{NP_1}{2}$$

El primer término es la probabilidad de que dos puntos de GR_1 sean también puntos de GR_2. El segundo término es la probabilidad de que los restantes puntos de GR_1 no sean puntos de GR_2. El tercer término es el número de combinaciones diferentes de pares de puntos recurrentes de GR_1. Reordenando términos, tenemos:

$$P(NPR=2)=\frac{\prod_{i=0}^{NP_1-3}(NP-NP_2-i)}{\prod_{i=0}^{NP_1-1}(NP-i)}.NP_2.(NP_2-1).\binom{NP_1}{2}$$

En general para términos de NPR = k obtendremos la siguiente expresión:

$$P(NPR=k)=\prod_{i=0}^{k-1}(NP_2-1).\frac{\prod_{i=0}^{NP_1-k-1}(NP-NP_2-i)}{\prod_{i=0}^{NP_1-1}(NP-i)}.\binom{NP_1}{k} \qquad (4)$$

Para k = 1,2,3,…, NP_1-1. Finalmente, para NPR = NP_1 la probabilidad será:

$$P(NPR=NP_1)=\frac{\prod_{i=0}^{NP_1-1}(NP_2-i)}{\prod_{i=0}^{NP_1-1}(NP-i)} \qquad (5)$$

Esta distribución de probabilidad es la herramienta clave que permitirá testear en qué casos los puntos obtenidos a partir de dos series difiere significativamente del esperado si ambas series han sido generadas por procesos independientes (la hipótesis nula del test). Por lo tanto, al rechazar la hipótesis nula obtendremos evidencia, para un nivel de significación elegido, que ambas series están relacionadas, presentando un cierto grado de dependencia estadística o similaridad dinámica.

4. Procedimiento del test

El procedimiento de construcción del test se basa en la comparación del valor de TREC de las series elegidas con el valor esperado de TREC, E(TREC), de dos series generadas a partir de sistemas independientes. E(TREC) puede ser obtenida a partir de E(NPR), es decir la esperanza matemática de la distribución de probabilidad derivada en la sección anterior. La existencia de número alto de puntos en el ACR no significa necesariamente dependencia estadística. Esto sólo será aceptada si el número de puntos en el ACR es significativamente mayor que el número de puntos esperado si ambas series fueran independientes. En este caso, podremos concluir que existe evidencia para rechazar la hipótesis nula, es decir, para aceptar que existe una relación (de algún tipo) entre las series.

En orden de aplicar nuestro test, se deben seguir los siguientes cinco pasos:

1) Seleccionar dos series a estudiar, que pueden ser simuladas o reales.
2) Construir el GR de ambas series. Para hacer esto, es necesario fijar el valor del radio r. Este radio es una distancia que determina el criterio de proximidad. Como en Fernández (2015) se fija el valor de r para alcanzar un porcentaje de puntos recurrentes igual al 10%.
3) Calcular el NPR a partir del ACR.
4) Obtener la distribución de probabilidad de NPR, utilizando las expresiones (3), (4) y (5).
5) Calcular el p-valor del test, es decir el menor nivel de significación para el cual la hipótesis nula será rechazada.

Para ilustrar el procedimiento descrito, empezaremos aplicándolo a los siguientes dos casos:

Primero, a dos series obtenidas a partir de una simulación del sistema caótico de Henon[2]; como ambas fueron generadas en el mismo sistema, se espera que el test permita detectar una clara relación. Segundo, dos series obtenidas del sistema caótico de Henon y Ikeda: estas series provienen de dos sistemas diferentes, por lo tanto, los resultados del test deberían reflejar su independencia.

Los resultados obtenidos, para n = 200, 500 y 1000 se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 1. Resultados de la aplicación del test a dos pares de series simuladas

Series	n	NPR	E(NPR)	TREC	E(TREC)	p-valor
Henon x - Henon y	200	764	199	3,8381	1	0,0000
	500	4962	1247	3,9775	1	0,0000
	1000	19904	4995	3,9848	1	0,0000
Henon - Ikeda	200	178	199	0,8900	1	0,9564
	500	1148	1247	0,9200	1	0,9993
	1000	4735	4995	0,9500	1	1,0000

La Tabla 1 muestra:

- El NPR y TREC del ACR.
- El valor esperado de NPR y TREC si ambos sistemas fueran independientes.

[2] Las ecuaciones de los sistemas dinámicos utilizados en este trabajo se presentan en el Apéndice.

- Los p-valores asociados con cada uno de los test.

Los resultados obtenidos son conclusivos:

Para dos series generadas del sistema de Henon, los valores de NPR y TREC son aproximadamente 4 veces mayores de lo esperado si amas series fueran independientes. Los p valores son iguales a cero, por lo tanto, se rechaza claramente la hipótesis nula. Esto ocurre para los tres tamaños de muestra. Para las series generadas a partir de sistema diferentes, los valores de los indicadores son muy cercanos al valor esperado bajo la hipótesis nula. Los grandes valores p obtenidos en este caso brinda ninguna evidencia contra la hipótesis nula para los tres tamaños de muestra a cualquier nivel de significación.

Estos resultados pueden considerarse una ilustración de la buena performance del test en dos casos extremos. De forma de estudiar mejor su performance, se estudiarán los mismos sistemas transformándolos de la siguiente forma: primero, se aplica el test para las series del sistema de Henon afectadas con diferentes niveles de ruido. Como es obvio el nivel de ruido distorsiona la estructura del sistema y cuanto más grande el nivel de ruido, menor será la relación entre las series. En segundo lugar, aplicamos el procedimiento para sistemas de Henon y Ikeda acoplados. En concreto, se considera que el sistema de Ikeda conduce al sistema de Henon con diferentes niveles de acoplado. El test deberá reflejar que cuando mayor el valor del acople, mayor deberá ser los valores de NPR y TREC y por lo tanto mayor la interdependencia entre ambos sistemas.

Tabla 2. Resultados de la aplicación del test a series de Henon afectadas por ruido y a pares de series acopladas del sistema Henon – Ikeda (E(NPR = 1247, E(TREC) = 1).

Henon x - Henon y					Henon - Ikeda			
% Ruido	NPR	TREC	p - valor		Fuerza acople	NPR	TREC	p - valor
0	4853	3,8900	0,0000		0,000	1148	0,92	0,9993
0,01	4819	3,8600	0,0000		0,001	1190	0,95	0,9666
0,1	3307	2,6500	0,0000		0,010	1270	1,02	0,2439
0,2	2370	1,9000	0,0000		0,100	1295	1,04	0,0702
0,5	1539	1,2300	0,0000		0,500	1370	1,10	0,0001
0,8	1292	1,0400	0,0000		1,000	1374	1,12	0,0000
0,9	1263	1,0100	0,3176		2,000	1401	1,12	0,0000
1	1183	0,0095	0,9801		3,000	1406	1,13	0,0000

Los resultados obtenidos para una muestra de tamaño n = 500 se muestran en la Tabla 2. Los resultados presentados en la Tabla 2 muestran que, en el caso del sistema de Henon ante aumentos del nivel de ruido la recurrencia conjunta disminuye. Como era de esperar, la interdependencia entre ambas series se mantiene para niveles pequeños de ruido y desaparece al aumentar el nivel de ruido. En el caso del sistema acoplado de

Henon – Ikeda, los resultados concuerdan con lo esperado: si la fuerza del acople aumenta también se incrementa la interdependencia entre ambos sistemas.

Obviamente, solo unos pocos sistemas y una sola simulación para cada caso no son suficiente para evaluar si el test propuesto es adecuado. Por lo tanto, se deben estudiar más sistemas y mayor número de réplicas. Esto se realizará en la próxima sección.

5. Aplicación del procedimiento de test a series simuladas

De forma de analizar la calidad del procedimiento propuesto, los ejemplos presentados deben ser extendidos de dos formas:

1. Aplicar el test a un amplio conjunto de sistemas que permita más tipos de interrelaciones e independencias para ser evaluado.
2. Repetir cada experimento muchas veces.

En esta sección se aplica el test a series simuladas de los siguientes sistemas:

- Dos sistemas caóticos deterministas (Henon y Ikeda).
- Un sistema no caótico determinista con un atractor extraño (Gopy)
- Dos sistemas periódicos deterministas (Sine and Cosine).
- Dos sistemas aleatorios (Normal and Uniform).

Diferentes combinaciones de estos sistemas permiten obtener pares de series en lo cuales, a priori, la independencia es esperable y otros pares de sistemas en donde existe una interrelación.

Tabla 3. Porcentaje de rechazo de la hipótesis nula de independencia (α = 5%) y p-valor promedios para los sistemas seleccionados. Número de réplicas = 500.

	n = 200		n = 500		n = 1000	
	% rechazo	p- valor promedio	% rechazo	p- valor promedio	% rechazo	p- valor promedio
Sine - Henon	0,8	0,9141	0,2	0,9430	0,2	0,9262
Henon - Ikeda	7,4	0,5361	6,9	0,5591	0,4	0,9510
Ikeda - GOPY	5,8	0,5637	4,6	0,5990	0,0	0,9938
Normal - Uniform	4,2	0,5234	3,4	0,5167	4,8	0,6882
Normal - Sine	6,8	0,5193	2,2	0,7875	0,0	0,9847
Uniform - Henon	5,2	0,4029	6,4	0,5010	6,6	0,5115
Linear Transformation	100,0	0,0000	100,0	0,0000	100,0	0,0000
Henon 1 -3 embed. Dim.	100,0	0,0000	100,0	0,0000	100,0	0,0000
Sine - Cosine	100,0	0,0000	100,0	0,0000	100,0	0,0000
Sine - Sine squared	100,0	0,0000	100,0	0,0000	100,0	0,0000
Henon x - Henon y	100,0	0,0000	100,0	0,0000	100,0	0,0000
Ikeda x - Ikeda y	97,2	0,0059	100,0	0,0000	100,0	0,0000

En la Tabla 3 y Tabla 4 se resumen los resultados obtenidos para el conjunto de simulaciones, presentando el porcentaje de rechazo de la hipótesis nula de independencia para un nivel de significación del 5% y el p-valor promedio.

Los resultados obtenidos en la Tabla 3 permiten plantear las siguientes conclusiones:

1. Para el primer grupo, el porcentaje de rechazo es muy bajo en todos los casos, siempre menor al 8%. Esto indica una buena performance: cuando la hipótesis nula de independencia es cierta, es rechazada en un bajo porcentaje de las veces. Los resultados son similares para los tres tamaños de muestra considerados.
2. Para el segundo grupo, el porcentaje de rechazo es 100%, excepto en un caso, que es 97.2%. En otras palabras, la hipótesis nula (que en este caso es falsa) se rechaza en todos los casos prácticamente.

Tabla 4. Porcentaje de rechazo de la hipótesis nula de independencia y p-valor promedios para series del sistema Henon afectadas por ruido y series del sistema acoplado Henon – Ikeda. Número de réplicas = 500.

Henon x - Henon y				Henon - Ikeda		
% Ruido	% rechazo	p - valor promedio		Fuerza acople	% rechazo	p - valor promedio
0,00	100,0	0,0000		0,000	6,9	0,5581
0,01	100,0	0,0000		0,001	13,0	0,4763
0,10	100,0	0,0000		0,010	96,6	0,0241
0,20	100,0	0,0000		0,100	100,0	0,0000
0,50	100,0	0,0000		0,500	100,0	0,0000
0,80	81,0	0,0515		1,000	100,0	0,0000
0,90	63,6	0,1366		2,000	100,0	0,0000
1,00	33,8	0,3718		3,000	100,0	0,0000
1,50	8,2	0,5653		4,000	100,0	0,0000
2,00	6,4	0,5913		5,000	100,0	0,0000

En primer lugar, la Tabla 4 muestra que la capacidad del test para detectar dependencia entre dos series disminuye al aumentar el nivel de ruido. En segundo lugar, para los sistemas acoplados, cuando aumenta la fuerza, el porcentaje de rechazo de la hipótesis nula también aumenta.

Estos resultados sugieren que el procedimiento de test propuesto es robusto en todas las situaciones analizadas. Esta buena performance para series simuladas indica que puede ser una buena herramienta para detectar la posible interrelación o dependencia entre series reales. Este es el objetivo de la próxima sección en donde se aplica el procedimiento de test para series económicas.

6. Aplicación del test a series económicas

Se aplica la metodología para analizar la posible interdependencia entre ciertas series económicas. En particular se estudian dos temas que se han estudiado en la literatura económica con diferentes metodologías y sobre los cuales hay conceso:

1. La relación entre tasa de inflación y tasas de interés nominal
2. La relación entre empleo y producto

El objetivo del estudio será únicamente ejemplificar algunas de las posibilidades y utilidad del procedimiento propuesto.

6.1 Relación entre tasas de interés nominal y tasa de inflación

Esta relación ha sido ampliamente estudiada en la literatura. Con respecto a las tasas de interés, se han aplicado diferentes aproximaciones: nominal y real, ex-post y ex ante, diferentes frecuencias, etc. De forma similar la tasa de inflación puede ser la actual o la tasa esperada. En el caso de considerar variables esperadas, aparecen cuestiones vinculadas a la formación de expectativas. A partir de todos los casos estudiados en la literatura empírica, existe un consenso sobre la existencia de una relación positiva entre tasas de interés nominal y tasa de inflación actual.

Se aplicará la metodología descrita en este trabajo a series mensuales de la economía de Estados Unidos para analizar si es detectada o no una relación.

Se utilizan las siguientes series:

1. Tasas de interés nominal:
- Tasa de mercado secundario de 3-month Certificate Depotit, elegida como ejemplo de tasa de interés de corto plazo. Período enero 1934 a mayo 2016.
- Treasury Constant Maturity Rate a un año, tasa de interés a medio plazo. Período Abril 1953 a Mayo 2016.
- Moody's Seasoned AAA Corporate Bond Yield, representativa un tasas de interés a largo plazo. Período: Enero 1919 a Mayo 2016[3].

2) Tasa de inflación: tasa interanual de variación del CPI-U publicada por el US Bureau of Labor Statistics.

La Tabla 5 presenta los resultados donde claramente se confirma la existencia de una relación entre las tres series de tasa de interés y la tasa de inflación para los períodos

[3] Las tres series de tasas de interés están disponibles en el sitio web de Federal Reserve Bank of St Louis.

elegidos. Los tres p-valores son cero, indicando que la hipótesis nula de independencia es rechazada para cualquier nivel de significación.

Tabla 5. Aplicación del test a series de tasa de interés nominal contra la serie de tasa de inflación

Series	n	TREC	E(TREC)	p valor
Short term rate - Inflation rate	975	1,41	1	0
Medium term rate - Inflation rate	744	1,75	1	0
Long term rate - Inflation rate	1155	1,67	1	0

Es posible analizar cuando esta relación se mantiene para ciertos sub períodos muestrales: un primer período hasta 1953, que incluye la Gran Depresión y las dos guerras mundiales; un segundo período entre 1953 y 1980; y un tercer período entre 2015 y 2016. Este tercer periodo corresponde a un mayor desarrollo de los mercados financieros, la aparición de nuevos instrumentos, un incremento en el nivel de información accesible por los agentes y una alta movilidad de capitales entre países.

Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 6. Se observa que la existencia de la relación entre las variables se mantiene para todos los sub periodos considerados.

Tabla 6. Aplicación del test a series de tasa de interés nominal y tasa de inflación para sub períodos muestrales.

Series	Periodo	n	TREC	E(TREC)	p valor
Short term rate - Inflation rate	1	231	1,43	1	0,0000
	2	321	2,62	1	0,0000
	3	423	1,79	1	0,0000
Medium term rate - Inflation rate	1	231	1,51	1	0,0000
	2	321	2,94	1	0,0000
	3	423	1,81	1	0,0000
Long term rate - Inflation rate	1	231	1,79	1	0,0000
	2	321	4,98	1	0,0000
	3	423	2,07	1	0,0000

6.2Relación entre empleo y producto

Esta relación está relacionada con la función de producción agregada, que relaciona el producto agregado a factores de producción. Muchos trabajos empíricos y teóricos se han desarrollado para conocer las propiedades de esta función de producción. Existe un amplio consenso sobre ciertas relaciones empíricas que esta función muestra. Una propiedad de esta función ampliamente aceptada es que existe una relación no lineal entre las cantidades de factores productivos y la cantidad de producto agregado obtenido (es decir, que la función es no lineal).

Por lo tanto, vamos a aplicar el procedimiento propuesto para chequear estar propiedad en la economía de Estados Unidos para el insumo trabajo y brindar evidencia empírica. Para realizar esto, se utilizan las series trimestrales de Producto Interno Bruto (PIB) publicada por el US Bureau of Economic Analysis, y las series de ALL Employees elaborada por el US Bureau of Labor Statistics (período: primer trimestre 1960 al primer trimestre 2016).

En la Tabla 7 se muestran los resultados del test junto a los p- value de los coeficientes de correlación de Pearson. Este coeficiente es una herramienta ampliamente utilizada para detectar relaciones de tipo lineal entre dos series. Se observa que ambos test muestran el mismo resultado, lo que implica el rechazo de la hipótesis nula para cualquier nivel de significación y por lo tanto arrojan evidencia empírica de la existencia de una relación entre PIB y empleo.

Tabla 7. Aplicación del test a series PIB y empleo.

Series	n	TREC	p - valor	Coef. Correlación p - valor
GDP - Employment	221	1,29	0,0000	0,0000
GDP - Employment (rediduals)	221	1,18	0,0010	1,0000

En la segunda columna, se presentan los resultados del test luego de filtrar el componente lineal de la relación. Sin embargo, los p-value de test se mantienen muy bajos, por lo tanto, se sigue rechazando la hipótesis nula de independencia para cualquier nivel de significación usual. Por lo tanto, la conclusión es que existe una relación no lineal entre el empleo y PIB (Fernández, 2014).

Este ejemplo es útil para mostrar que el procedimiento propuesto en este artículo permite detectar dependencia no lineal entre variables mientras que otros test como el coeficiente de correlación de Pearson no puede.

7. Conclusiones

El objetivo principal de este artículo es diseñar un criterio que permita determinar en qué casos dos series provienen de sistemas dinámicos independientes. El procedimiento es desarrollado sobre la base del análisis de recurrencia conjunto y en concreto en base al indicador cuantitativo del porcentaje de puntos recurrentes. Este indicador mide el nivel de dependencia o sincronización existente entre dos series. El valor de este indicador tiene una clara interpretación cuando toma valores extremos (muy alto o muy bajo), pero no es obvio su interpretación para valores intermedios. Para solucionar este problema, se deriva la distribución de probabilidad de la variable número de puntos recurrentes en el ACR bajo la hipótesis nula de independencia. Esta distribución de probabilidad exacta permite determinar un punto de corte a partir del cual determinar en qué caso las series presentan dependencia estadística o no.

La performance del procedimiento presentado es analizada a través de un estudio de simulación a un amplio conjunto de sistemas en los cuales la existencia o no de independencia es evidente. Se aplicó también a series afectadas por niveles crecientes de ruido y para pares de sistemas acoplados con diferentes grados de acoplamiento. Los resultados obtenidos son muy satisfactorios y confirman la eficiencia del método propuesto.

Finalmente, se utilizó la metodología para estudiar la relación empírica entre la tasa de interés nominal y la tasa de inflación, y entre el PIB y el empleo. En ambos casos, los resultados son claros en línea el consenso existente en la literatura. Además, en el último ejemplo se mostró que el test es capaz de detectar relaciones lineales y no lineales.

BIBLIOGRAFÍA

- Aparicio, T., Pozo, E. and Saura, D. (2011) Detecting Determinism Using Recurrence Quantification Analysis: A Solution to the Problem of Embedding. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, **15**, 1-10.
- Aparicio, T., Pozo, E. and Saura, D. (2009) Detecting Determinism Using Recurrence Quantification Analysis: Three Test Procedures. *Journal of Economic Behavior & Organization*, **65**, 768-787.
- Aparicio, T., Pozo, E. and Saura, D. (2013) Do Exchange Rate Series Present General Dependence? Some Results Using Recurrence Quantification Analysis. *Journal of Economics and Behavioral Studies*, **5**, 678-686.
- Belaire-Franch, J. (2004) Testing for Non-Linearity in an Artificial Financial Market: A Recurrence Quantification Approach. *Journal of Economic Behavior & Organization*, **54**, 483-494.
- Eckmann, J.P., Kamphorst, S. and Ruelle, D. (1987) Recurrence Plots of Dynamical Systems. *Europhysics Letters*, **4**, 973-977.
- Fernández, D. G. (2014). *Reducción del ruido y predicción de series temporales de alta frecuencia mediante sistemas dinámicas no lineales y técnicas lineales.* BCU DT N° 201401.
- Fernández, D. G. (2015). *Análisis no lineal de series temporales en espacios de estados de alta dimensión*. BCU DT N° 201507.
- Goswami, B., Ambika, G., Marwan, N. and Kurths, J. (2012) On Interrelations of Recurrences and Connectivity Trends between Stocks Indices. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **391**, 4364-4376.
- Goswami, B., Marwan, N., Feulner, G., Kurths, J. (2013) How Do Global Temperature Drivers Influence Each Other? *The European Physical Journal—Special Topics*, **222**, 861-873.
- Grebogi, C., Ott, E., Pelikan, S. and Yorke, L. (1984) Strange Attractors That Are Non Chaotic. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **13**, 261-268.

- Guhathakurta, K., Bhattarcharya, B. and Roy Chowdhury, A. (2010) Using Recurrence Plot Analysis to Distinguish between Endogenous and Exogenous Stock Market Crashes. *Physica A*: *Statistical Mechanics and Its Applications*, **389**, 1874-1882.
- Heller, Y., Heller, R. and Gorfine, M. (2013) A Consistent Multivariate Test of Association Based on Ranks of Distances. *Biometrika*, **100**, 495-502.
- Holyst, J.A., Zebrowska, M. and Urbanowicz, K. (2001) Observations of Deterministic Chaos in Financial Time Series by Recurrence Plots, Can One Control Chaotic Economy? *The European Physical Journal B,* **20**, 531-535
- Kyrtsou, C. and Vorlow, C.E. (2005) Complex Dynamics in Macroeconomics: A Novel Approach. In: Diebolt, C. and Kyrtsou, C., Eds, *New Trends in Macroeconomics*, Springer-Verlag, Berlin, 223-238.
- Kyrtsou, C. and Terraza, M. (2010) Seasonal Mackey-Glass-GARCH Process and Short-Term Dynamics. *Empirical Economics*, **38**, 325-345.
- Marwan, N. (2008) A Historical Review of Recurrence Plots. *European Physical Journal—Special Topics*, **164**, 3-12.
- Marwan, N., Romano, M.C., Thiel, M. and Kurths, J. (2007) Recurrence Plots for the Analysis of Complex Systems. *Physics Reports*, **438**, 237-329.
- Packard, N., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D. and Shaw, R.S. (1980) Geometry from a Time Series. *Physical Review Letters*, **45**, 712-716
- Reshef, D.N., Reshef, Y.A., Finucane, H.K., Grossman, S.R., McVean, G., Turnbaugh, P.J., Lander, E.S., Mitzenmacher, M. and Sabeti, P.C. (2011) Detecting Novel Associations in Large Data Sets. *Science*, **334**, 1518-1524Romano, M.C. (2004) Synchronization Analysis by Means of Recurrences in Phase Space. Ph.D. Dissertation, University of Potsdam, Potsdam Schinkel, S., Dimigen, O. and Marwan, N. (2008) Selection of Recurrence Threshold for Signal Detection. *The European Physical Journal—Special Topics*, **164**, 45-53.
- Siqueira, S., Takahashi, D.Y., Nakata, A. and Fujita, A. (2014) A Comparative Study of Statistical Methods Used to Identify Dependencies between Gene Expression Signals. *Briefings in Bioinformatics*, **15**, 906-918.
- Sklar, A. (1959) Fonctions de Répartition à n Dimensions et Leurs Marges. Vol. 8, Institut Statistique de l'Université de Paris, Paris, 229-231.
- Szekely, G., Rizzo, M. and Bakirov, N. (2007) Measuring and Testing Independence by Correlation of Distances. *Annals of* Statistics, **35**, 2769-2794Takens, F. (1981) Detecting Strange Attractors in Turbulence. In: Rand, D. and Young, L., Eds, *Dynamical Systems and Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin, 366-381.
- Webber Jr., C.L. and Zbilut, J.P. (1994) Dynamical Assessment of Physiological Systems and States Using Recurrence Plot Strategies. *Journal of Applied Physiology*, **76**, 965-973.
- Zbilut, J.P. and Webber Jr., C.L. (1992) Embeddings and Delays as Derived Quantification of Recurrence Plots. *Physics Letters A*, **171**, 199-203.
- Zbilut, J.P., Giuliani, A. and Webber Jr., C.L. (1998) Detecting Deterministic Signals in Exceptionally Noisy Environments Using Cross-Recurrence Quantification. *Physics Letters A*, **246**, 122-128.
- Zbilut, J.P. (2005) Use of Recurrence Quantification Analysis in Economic Time Series. In: Salzano, M. and Kirman A., Eds, *Economics*: *Complex Windows*, Springer-Verlag, Milan, 91-104. - Barkoulas, J.T. (2008) Testing for Deterministic Monetary Chaos: Metric and Topological Diagnostics. *Chaos*, *Solitons and Fractals*, **38**, 1013-1024.

Apéndice: una breve descripción de los sistemas dinámicos empleados

En este apéndice se brinda algunos detalles de las ecuaciones utilizadas para generar los sistemas dinámicos aplicados en este estudio.

Henon System:

$$x_{t+1} = 1 - 1.4 \cdot x_t^2 + y_t$$

$$y_{t+1} = 0.3 \cdot x_t$$

Ikeda System:

$$t = 0.4 - \frac{6}{1 + x_t^2 + y_t^2}$$

$$x_{t+1} = 1 + 0.9 \cdot \left[x_t \cdot \cos(t) - y_t \cdot \sin(t) \right]$$

$$y_{t+1} = 0.9 \cdot \left[x_t \cdot \sin(t) + y_t \cdot \cos(t) \right]$$

GOPY System:

$$x_{t+1} = 2.8 \cdot \tanh(x_t) \cdot \cos(y_t)$$

$$y_{t+1} = y_t + 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Henon - Ikeda Coupled System:

$$x_{1,t+1} = 1 - 1.4 \cdot x_{1,t}^2 + y_t$$

$$x_{2,t+1} = 0.3 \cdot x_{1,t}$$

$$t = 0.4 - \frac{6}{1 + x_{3,t}^2 + x_{4,t}^2}$$

$$x_{3,t+1} = 1 + 0.9 \cdot \left[x_{3,t} \cdot \cos(t) - x_{4,t} \cdot \sin(t) \right] + \varepsilon \cdot x_{1,t}$$

$$x_{4,t+1} = 0.9 \cdot \left[x_{3,t} \cdot \sin(t) + x_{4,t} \cdot \cos(t) \right]$$